

فاعلية برنامج تعليمي قائم على بيئة تعلم تكاملية باستخدام GeoGebra وDesmos، في تنمية  
الفهم المفاهيمي للدالة الخطية لدى طلبة الصف الثامن

The Impact of An Educational Program Based on An Integrated Learning Environment Using Geogebra and  
Desmos, In Developing Conceptual Understanding of The Linear Function Among Eighth-Grade Students

بثينة سليمان محمود خطيب

Bothaina Suleiman Khatib

جامعة النجاح الوطنية – نابلس

أ.د. مجدي علي زامل

Prof. Majdi Ali Zamel

جامعة القدس المفتوحة

أ.د. ناجي علي قطناني

Prof. Naji Ali Qatnani

جامعة النجاح الوطنية – نابلس

DOI: <https://doi.org/10.64355/agjhss71916>

مجلة خليج العرب للدراسات الإنسانية والاجتماعية || هذه المقالة مفتوحة المصدر موزعة بموجب شروط وأحكام ترخيص مؤسسة المشاع الإبداعي (CC BY-NC-SA)

Clarivate | ProQuest

Ulrichsweb™

Crossref doi

ISSN  
INTERNATIONAL  
STANDARD  
SERIAL  
NUMBER  
INTERNATIONAL CENTRE



Google Scholar

معرفة  
e-Marefa



شبكة المعلومات العربية  
Arab Educational Information Network

AskZad



Scilit

INTERNATIONAL  
Scientific Indexing

المنظومة

### الملخص:

هدفت الدراسة إلى التحقق من فاعلية برنامج تعليمي قائم على بيئة تعلم تكاملية باستخدام تطبيق (GeoGebra) و (Desmos) في تنمية الفهم المفاهيمي للدالة الخطية لدى طلبة الصف الثامن الأساسي. واعتمدت الدراسة المنهج التجريبي بتصميمه شبه التجريبي، وتكونت عينة الدراسة من (60) طالباً من الصف الثامن من مدارس الداخل الفلسطيني وانقسمت العينة إلى مجموعتين: ضابطة وتجريبية بواقع (30) طالباً لكل مجموعة. حيث تم تدريس وحدة الدالة الخطية باستخدام تطبيق (GeoGebra) و (Desmos) للمجموعة التجريبية، بينما تلقت المجموعة الضابطة تدريس الوحدة بالطريقة العادية. ولتحقيق أهداف الدراسة، طُبّق اختبار يتضمن الفهم المفاهيمي في الدالة الخطية، وقد جرى التحقق من صدق الاختبار وثباته، وقد طُبّق هذا الاختبار بصورة قبلية وبعديّة على المجموعتين، إضافة إلى تطبيق مؤجل اقتصر على المجموعة التجريبية. وأظهرت النتائج أن كلا المجموعتين حققتا تحسناً ملحوظاً في نتائج الاختبار البعدي مقارنة بالاختبار القبلي. كما أظهرت النتائج عدم وجود فروق ذات دلالة إحصائية في الفهم المفاهيمي في الاختبار البعدي، وكذلك أظهرت النتائج عدم وجود فروق ذات دلالة إحصائية تُعزى إلى مُنغِيز الجنس، وعدم وجود أثر للتفاعل الثنائي بين المجموعة والجنس. فيما أظهرت نتائج الاختبار المؤجل للمجموعة التجريبية وجود فروق ذات دلالة إحصائية في الفهم المفاهيمي لصالح القياس المؤجل. وأوصت الدراسة بتبني مدخل الدمج بين التطبيقين بدلاً من الاقتصار على أحدهما، انسجاماً مع ما أظهرته الدراسة من أثر إيجابي. كما أوصت الدراسة بإطالة فترة تطبيق البرامج التعليمية عند استهداف الفهم المفاهيمي.

**الكلمات المفتاحية:** البرنامج التكامل، (GeoGebra)، (Desmos)، الفهم المفاهيمي، الدالة الخطية.

### Abstract:

The study aimed to assess the effectiveness of an educational program based on an integrated learning environment using GeoGebra and Desmos applications in enhancing the conceptual understanding of linear functions among eighth-grade students. A quasi-experimental design was employed within the experimental method. The study involved 60 eighth-grade students from schools in the Palestinian interior, divided into two groups: a control group and an experimental group, each comprising 30 students. The experimental group was taught the linear function unit using GeoGebra and Desmos applications, while the control group learned through traditional teaching methods.

To achieve the objectives of the study, a test measuring conceptual understanding of the linear function was administered. The validity and reliability of the test were verified. The test was administered as a pre-test and post-test to both groups, in addition to a delayed test administered to the experimental group only. The results showed that both groups achieved a noticeable improvement in post-test scores compared to pre-test scores. The results also showed no statistically significant differences in conceptual understanding on the post-test. Furthermore, no statistically significant differences were found attributable to gender, and no significant interaction effect was found between group and gender. The delayed test results for the experimental group showed statistically significant differences in conceptual understanding in favor of the delayed measurement. The study recommended adopting an integrated approach combining both applications rather than relying on either one alone, in line with the positive effect demonstrated by the study. It also recommended extending the duration of educational programs when targeting conceptual understanding.

**Keywords:** Integrated program, GeoGebra, Desmos, conceptual understanding, linear function.

### المقدمة:

تشهد المنظومات التعليمية المعاصرة تحولات متسارعة بفعل التطورات التكنولوجية، حيث أصبحت التكنولوجيا الرقمية جزءاً لا يتجزأ من عمليات التعليم والتعلم في مختلف المراحل الدراسية. وبشكل هذا التحول الرقمي نقلة نوعية في منظومات التدريس والتعلم، ولا سيما في مجال تعليم الرياضيات الذي يُعد من أكثر الحقول اعتماداً على التمثيلات والمفاهيم المجردة. ولم تعد الطرق التقليدية في تدريس الرياضيات قادرة على مواكبة هذه التحولات بطريقة كافية.

كما أن التسارع في تطور أدوات التكنولوجيا التعليمية أدى إلى تحول الممارسات الصفية من بيئات تقليدية قائمة على الشرح اللفظي والتمارين النمطية، إلى بيئات تعلم تفاعلية رقمية تعطي المتعلم فرص الاستكشاف والمشاركة الفاعلة في بناء المعرفة، الأمر الذي انعكس إيجاباً على تعميق الفهم المفاهيمي لدى المتعلمين (Zou et al., 2025)

وتتجه السياسات التعليمية العالمية، بما في ذلك توصيات NCTM وOECD، نحو دمج التكنولوجيا بصورة تكاملية في تدريس الرياضيات، نظراً لما تقدمه من فرص لبناء فهم أعمق للعلاقات الرياضية المعقدة. وقد بينت الدراسات الدولية أن استخدام البرمجيات التفاعلية يعمق الفهم المفاهيمي والإجرائي، ويساعد في الانتقال من التركيز على خطوات الحل إلى فهم بنية المفهوم وأسس العلاقات الرياضية (Cirneanu & Moldoveanu, 2024). كما أظهرت أبحاث حديثة مُلاكويك (Mollakuqe & Mollakuqe, 2025) أن التكامل بين أكثر من أداة رقمية، وليس استخدامها منفردة، يحقق أثراً تعليمياً أكبر، ويرجع ذلك إلى تعدد التمثيلات التي يُتاح للطلاب التعامل معها. فبرنامج (GeoGebra) يتيح نمذجة العلاقات الهندسية وتغيير المعاملات بصورة ديناميكية، بينما يوفر (Desmos) واجهة بيانية جبرية تسمح بفحص التغيرات لحظياً، مما يعمق الارتباط بين التمثيل الجبري والبياني للدوال الخطية وغيرها من المفاهيم. وقد أثبتت دراسات تجريبية عديدة مثل دراسة شيشان (Chechan et al., 2023a) ودراسة داي (Dy, 2024) أن دمج التكنولوجيا في تدريس الدوال يرفع من مستوى الفهم، ويُحسن القدرة على تفسير السلوك البياني، ويزيد من الدافعية نحو تعلم الرياضيات.

وتعد الدوال الخطية من الموضوعات الجوهرية في مناهج الرياضيات، لما لها من ارتباط وثيق بمفاهيم رياضية لاحقة عديدة، كالدوال التربيعية والدوال كثيرة الحدود، والتحليل البياني للعلاقات الرياضية (Elagha & Pellegrino, 2024). كما تحظى الدالة الخطية بموقع محوري في مناهج الرياضيات في كثير من الدول، إذ توصي منظمات مهنية كـ NCTM بتدريسها لقدرتها على تمكين الطالب من إدراك البنية الرياضية العامة للدوال. ويشكل تدريس الدوال الخطية في المرحلة المتوسطة نقطة تحول معرفي ينتقل فيها الطالب من إجراء العمليات الحسابية البسيطة إلى تحليل الأنماط المعقدة، الأمر الذي يجعل منها ركيزة أساسية لبناء المعرفة الرياضية العليا (Cárcamo et al., 2026)

غير أن عدداً من الدراسات التربوية قد أشارت إلى أن الطلبة يواجهون صعوبات متفاوتة في إدراك مفهوم الدالة الخطية، سواء على المستوى المفاهيمي المتعلق بفهم العلاقة بين المتغيرين، أو على المستوى الإجرائي المرتبط بتمثيلها بيانياً والتعامل مع معادلاتها وحل المسائل المتعلقة بها (Wati et al., 2018) فبالرغم من التطور الذي شهدته مناهج الرياضيات، ما تزال طرق التدريس المعتادة تركز على الحفظ والتطبيق، بما يحد من قدرة الطلبة على الوصول إلى فهم عميق للمفاهيم الرياضية.

ويُشكل الصف الثامن مرحلة هامة في تطور التفكير الرياضي، إذ يبدأ فيها الطالب الانتقال من التفكير الحسابي إلى التفكير الدالي والعالمي. كما أن قدرة الطالب على استيعاب الدوال الخطية في هذه المرحلة ترتبط ارتباطاً مباشراً بنجاحه لاحقاً في الرياضيات، لا سيما في مقررات الهندسة التحليلية والجبر وحل المشكلات الرياضية (Birgin & Yazıcı, 2021).

وفي ضوء ما سبق، تسهم الدراسة الحالية في معالجة قضية تربوية مهمة، من خلال تصميم برنامج تعليمي قائم على بيئة تعلم تكاملية توظف (GeoGebra) و(Desmos) معاً، والتي تركز على الفهم المفاهيمي لدى طلبة الصف الثامن الأساسي. كما توفر الدراسة إطاراً علمياً يُمكن المعلمين من تطبيق بيئة تعلم رقمية تكاملية لها القدرة على التنوع في طرائق التدريس عبر استراتيجيات تفاعلية تركز على التعلم النشط، وتيسر الانتقال بين التمثيلات الرياضية المختلفة، بما يساعدهم على شرح المفاهيم المعقدة، وتحسين قدرتهم على تشخيص أخطاء الطلبة المفاهيمية بشكل فوري، بالإضافة إلى معالجة الصعوبات المفاهيمية الشائعة في فهم الميل والتقاطع والتمثيل البياني.

#### مشكلة الدراسة

من خلال تجربة الباحثة كمدرسة لمادة الرياضيات، لاحظت الباحثة أن طلاب الصف الثامن يواجهون تحديات واضحة في فهم الدالة الخطية بجوانبها المتعددة. تتجلى هذه الصعوبات في القدرة المحدودة على تمثيلها وتحليلها رياضياً والربط بين تمثيلاتها المختلفة: الجبرية، والبيانية، والجدولية. يجد الطلاب صعوبة في استيعاب المفاهيم الأساسية مثل الميل، والتقاطع مع المحاور، والصيغة العامة، والتمثيل البياني الصحيح، مما يؤثر سلباً على أدائهم الأكاديمي في الرياضيات. بالإضافة إلى ذلك، أظهرت النقاشات المهنية مع زملائها من مدرسي الرياضيات صعوبة متكررة لدى الطلاب في التعمق في مفاهيم الدالة الخطية، خاصة تلك التي تدرّس في بداية العام الدراسي. تزداد هذه الصعوبات وضوحاً خلال الامتحانات الوزارية، حيث يعاني الطلاب من مشقة في تذكر هذه المفاهيم وتطبيقها في حل المسائل الرياضية.

وعلى الرغم من أن نتائج امتحانات TIMSS 2023 تقيس التحصيل في الرياضيات بشكل عام، إلا أنها تُشكل مؤشراً داعماً على وجود تحديات حقيقية تواجه تعلم الرياضيات لدى طلبة الصف الثامن في الداخل الفلسطيني؛ إذ سجّلت النتائج انخفاضاً حاداً مقارنة بدورة عام 2019، بلغ 32 نقطة في متوسط الأداء. وتُبرز هذه النتائج، إلى جانب ملاحظات الباحثة الميدانية، الحاجة إلى تبني أساليب تدريس حديثة وتطبيقات تكنولوجية تفاعلية تدعم المفاهيم الرياضية.

وبالرغم من هذه الحاجة، لاحظت الباحثة أن تدريس الدالة الخطية ما زال يعتمد لدى كثير من المعلمين على الطرق الاعتيادية، مع وجود تفاوت شديد بين معلمي الرياضيات في تفعيل تطبيقات مثل GeoGebra و Desmos داخل غرفة الصف، رغم اعتمادهما رسمياً من قبل مطوري المناهج في البلاد.

وكذلك أظهرت الأدبيات التربوية الحديثة، كدراسة أوكتافيا وإريتا (Oktafia & Erita, 2025)، أن التكامل بين GeoGebra و Desmos أسهم في تحسين التفكير الرياضي لدى الطلبة من خلال دعم الاستكشاف والتمثيل المتعدد للمفاهيم في الهندسة التحليلية، كما أظهرت دراسة بوربا وآخرين (Purba et al., 2026) أن توظيف التطبيقات الرقمية في تدريس الرياضيات عزز تفاعل الطلبة مع التعلم وسهل فهم المفاهيم المجردة. إلا أن الدراسات التي تناولت بناء برنامج تعليمي تكاملي يدمج بين GeoGebra و Desmos معاً بشكل منظم ومتتابع، لتنمية الفهم المفاهيمي في موضوع الدالة الخطية تحديداً لدى طلبة الصف الثامن، ما زالت محدودة.

وانطلاقاً مما سبق، تتحدد مشكلة الدراسة في الإجابة عن السؤال الرئيس الآتي: ما فاعلية برنامج تعليمي قائم على بيئة تعلم تكاملية باستخدام GeoGebra و Desmos في تنمية الفهم المفاهيمي للدالة الخطية، لدى طلبة الصف الثامن؟

أسئلة الدراسة

انبثق عن السؤال الرئيس الأسئلة الفرعية الآتية:

1. هل توجد فروق ذات دلالة إحصائية عند مستوى الدلالة ( $\alpha = .05$ ) بين متوسطات درجات أفراد المجموعة التجريبية ودرجات أفراد المجموعة الضابطة على اختبار تنمية الفهم المفاهيمي للدالة الخطية لدى طلبة الصف الثامن في مدارس الداخل الفلسطيني بعد تطبيق البرنامج التعليمي القائم على بيئة تعلم تكاملية باستخدام (GeoGebra) و (Desmos) تعزى إلى المجموعة (ضابطة، تجريبية) والجنس (ذكر، أنثى) والتفاعل الثنائي بينهما؟
2. هل توجد فروق ذات دلالة إحصائية عند مستوى الدلالة ( $\alpha = .05$ ) بين متوسطات درجات أفراد المجموعة التجريبية في القياسين القبلي والبعدي على اختبار تنمية الفهم المفاهيمي للدالة الخطية لدى طلبة الصف الثامن في مدارس الداخل الفلسطيني تعزى لفاعلية البرنامج القائم على بيئة تعلم تكاملية باستخدام (GeoGebra) و (Desmos)؟
3. هل توجد فروق ذات دلالة إحصائية عند مستوى الدلالة ( $\alpha = .05$ ) بين متوسطات درجات أفراد المجموعة التجريبية في القياسين البعدي والمؤجل على اختبار تنمية الفهم المفاهيمي للدالة الخطية لدى طلبة الصف الثامن في مدارس الداخل الفلسطيني تعزى لفاعلية البرنامج القائم على بيئة تعلم تكاملية باستخدام (GeoGebra) و (Desmos)؟

أهمية الدراسة:

تتبع أهمية الدراسة الحالية من عدة جوانب نظرية وتطبيقية تسهم في إثراء المجال التعليمي والبحثي كما يلي:

الأهمية النظرية

تكتسب الأهمية النظرية لهذا البحث من مساهمته في تعزيز الجهد البحثي العربي ضمن هذا المجال، حيث تعالج الدراسة فجوة بحثية موجودة في مجال استخدام التطبيقات التفاعلية في التعليم العربي. يركز البحث، بشكل خاص، على الدراسات التجريبية التي توفر إطاراً نظرياً شاملاً يدمج بين نظريات التعلم البنائي والتعلم التفاعلي وكيفية تطبيقها في تعليم الرياضيات، مما يساعد على تعزيز الفهم النظري لأهمية البيئات التعليمية التكاملية. بالإضافة إلى ذلك، تسهم الدراسة في تطوير أدوات قياس متخصصة للفهم المفاهيمي، مما يزيد المكتبة العربية أدوات تقييم علمية ذات موثوقية عالية.

الأهمية التطبيقية

أما من الناحية التطبيقية، فإن أهمية الدراسة تتجلى في معالجة صعوبات تعلم الرياضيات عبر تقديم حلول علمية لمشكلة ضعف الفهم المفاهيمي لموضوع الدالة الخطية لدى طلبة الصف الثامن. ويُعتبر هذا الموضوع أساساً لفهم مواضيع رياضية لاحقة. كما أن الدراسة تسهم في تطوير المناهج وطرق التدريس عن طريق توفير دليل عملي يُعتمد عليه في تصميم وحدات تعليمية وتدريبية مبنية على أسس علمية، مما يدعم تحديث المناهج وطرق التدريس بما يتماشى مع التوجهات نحو التعليم الرقمي والتعلم النشط. تقدم الدراسة أيضاً نموذجاً تطبيقياً يمكن تكراره، يُستخدم في برامج تدريب المعلمين لاستغلال التكنولوجيا التعليمية بطرق فعالة ومبتكرة. بالإضافة إلى ذلك، توفر الدراسة دعماً لصنّاع القرار التربوي عبر توفير مؤشرات تساعد في وضع السياسات التعليمية المتعلقة بإدراج أدوات تكنولوجيا التعليم في المناهج الدراسية، مما يسهم في نهاية المطاف في تحسين نتائج تعلم الرياضيات وتطوير مهارات الطلبة وتعزيز بيئات التعلم الرقمية التفاعلية.

## أهداف الدراسة:

سعت الدراسة الحالية إلى تحقيق الأهداف الآتية:

1. الكشف عن فاعلية برنامج تعليمي قائم على بيئة تعلم تكاملية باستخدام (GeoGebra) و (Desmos) في تنمية الفهم المفاهيمي للدالة الخطية لدى طلبة الصف الثامن.
2. معرفة ما إذا كان هناك فروق بين متوسطات أداء أفراد المجموعتين التجريبية والضابطة في القياس البعدي على مقياس تنمية الفهم المفاهيمي للدالة الخطية لدى طلبة الصف الثامن.
3. تصميم برنامج تعليمي قائم على بيئة تعلم تكاملية باستخدام (GeoGebra) و (Desmos) في تدريس الدالة الخطية لطلبة الصف الثامن.
4. معرفة ما إذا كانت هناك فروق في أثر البرنامج التعليمي القائم على بيئة تعلم تكاملية باستخدام (GeoGebra) و (Desmos) تُعزى إلى متغير الجنس (ذكر، أنثى)، وإلى التفاعل الثنائي بين المجموعة (تجريبية، ضابطة) والجنس، في تنمية الفهم المفاهيمي للدالة الخطية لدى طلبة الصف الثامن.
5. الكشف عن مدى استمرارية (احتفاظ) أثر البرنامج التعليمي القائم على بيئة تعلم تكاملية باستخدام (GeoGebra) و (Desmos) لدى أفراد المجموعة التجريبية، من خلال المقارنة بين القياسين البعدي والمؤجل على اختبار الفهم المفاهيمي للدالة الخطية.

## 1. منهج الدراسة:

انطلاقاً من طبيعة الدراسة الحالية والمعلومات المراد الحصول عليها، ولتحقيق أهدافها بالشكل الذي يتضمن الدقة والموضوعية، استخدم المنهج التجريبي بتصميمه شبه التجريبي (Quasi-experimental Design) من أجل تقصي فاعلية برنامج تعليمي قائم على بيئة تعلم تكاملية باستخدام (GeoGebra) و (Desmos) في تنمية الفهم المفاهيمي للدالة الخطية لدى طلبة الصف الثامن، ويمتاز هذا النوع من التصميمات البحثية بقدرته على الموازنة بين متطلبات الضبط العلمي والقيود العملية التي تفرضها البيئة المدرسية. كما يعمل على توفير بيئة مناسبة للبحث العلمي تعطي مجالاً في اختيار الفرضيات المناسبة والقريبة من الإطار التعليمي، بحيث لا تؤثر على مصداقية النتائج.

## مجتمع الدراسة وعينتها

تكون مجتمع الدراسة من جميع طلبة الصف الثامن في المدارس العربية التي تقع شمال الداخل الفلسطيني والبالغ عددهم (4567 طالباً) وفق إحصائية وزارة التربية والتعليم (المعارف).

وفيما يتعلق بعينة الدراسة، فقد اختيرت حسب المراحل الآتية:

## العينة الاستطلاعية (Pilot Study)

من أجل التحقق من الخصائص السيكومترية للاختبار طبق الاختبار على عينة استطلاعية من مجتمع الدراسة ومن خارج عينتها الأصلية (الميدانية)، وقد بلغت (30) من طلبة الصف الثامن في مدارس الداخل الفلسطيني.

## العينة المستهدفة (المشاركون) (Target sample (Participants)

تمثل أفراد الدراسة في (60) من طلبة الصف الثامن في مدارس الداخل الفلسطيني، وقد قسموا إلى مجموعتين، إحداهما تجريبية والأخرى ضابطة، بواقع (30) لكل مجموعة، تم اختيارهن بطريقة قصدية نظراً لعمل الباحثة في نفس المدرسة مما يسهل عليها تنفيذ البرنامج وتمرير الاختبارات وأخذ موافقة أولياء الأمور.

## أداة الدراسة:

### أ) اختبار الفهم المفاهيمي للدالة الخطية:

من أجل تحقيق أهداف الدراسة الحالية، وبعد اطلاع الباحثة على محتوى وحدة الدالة الخطية المقررة لطلبة الصف الثامن، قامت الباحثة بتطوير اختبار لقياس مستوى الفهم المفاهيمي للدالة الخطية لدى طلبة الصف الثامن، وقد جرى بناء الاختبار وفق الخطوات الآتية: الاطلاع على الأدب التربوي، تحديد الهدف من الاختبار، بناء جدول مواصفات وبناء الاختبار بصورته الأولي.

## الخصائص السيكومترية للاختبار: صدق وثبات الاختبار

### (1) صدق الاختبار:

استخدم نوعان من الصدق كما يلي:

#### أ) صدق المحتوى

للتحقق من صدق المحتوى للاختبار، عرض الاختبار بصورته الأولية على مجموعة من ذوي الخبرة والاختصاص ممن يحملون درجة الدكتوراه في الرياضيات وأساليب تدريسيها، وقد بلغ عددهم (10) محكمين، وقد طلب من المحكمين إبداء آرائهم حول مدى ارتباط فقرات الاختبار بالفهم المفاهيمي للدالة الخطية، ومدى تمثيلها لمحتوى الوحدة الدراسية. وفي ضوء ملاحظات المحكمين، أجرت الباحثة التعديلات اللازمة على بعض الفقرات، وأصبح الاختبار صالحاً للتطبيق على عينة الدراسة.

#### ب) صدق البناء (معامل الصعوبة والتمييز)

من أجل التحقق من صدق البناء للاختبار، طُبق الاختبار على عينة استطلاعية مكونة من (30) من طلبة الصف الثامن. وقد تم حساب معامل الصعوبة لكل سؤال من خلال حساب خارج قسمة المتوسط الحسابي لدرجات الطلبة للسؤال على الدرجة القصوى المخصصة له. أما معامل التمييز، فقد تم حسابه باستخدام معامل ارتباط بيرسون بين درجة الطلبة على الفقرة والدرجة الكلية للاختبار. ويشير هذا المعامل إلى مدى قدرة الفقرة على التمييز بين الأفراد مرتفعي القدرة ومنخفضيها. يوضح الجدول (1) قيم معاملات الصعوبة والتمييز لفقرات اختبار الفهم المفاهيمي في صورته النهائية:

#### جدول (1):

قيم معاملات الصعوبة والتمييز لفقرات اختبار الفهم المفاهيمي للدالة الخطية

| الفقرة | المتوسط الحسابي | معامل الصعوبة | معامل التمييز |
|--------|-----------------|---------------|---------------|
| 1      | 3.17            | .63           | .485          |
| 2      | 3.00            | .60           | .440          |
| 3      | 4.10            | .82           | .588          |
| 4      | 3.17            | .63           | .156          |
| 5      | 4.50            | .90           | .379          |
| 6      | 2.33            | .47           | .369          |
| 7      | 2.17            | .43           | .305          |

يظهر جدول (1) قيم معاملات الصعوبة والتمييز لفقرات اختبار الفهم المفاهيمي للدالة الخطية، حيث تراوحت معاملات الصعوبة بين (0.43) و (0.90). ويشير هذا المدى إلى أن معظم الفقرات جاءت ضمن النطاق المقبول (0.30 – 0.90) وفقاً لمعايير مادسن (Madsen, 1983).

وفيما يتعلق بمعاملات التمييز، فقد تراوحت بين (0.156) و (0.588)، حيث تُظهر الفقرة (4) قدرة تمييزية ضعيفة لكونها أقل من (0.20) وبناءً عليه حُذفت، في حين جاءت غالبية الفقرات بقيم مقبولة إلى ممتازة، حيث تجاوزت العديد منها (0.30) وفقاً لمعيار إبل (Ebel, 1972). وبذلك أصبح عدد فقرات الاختبار (6) فقرات.

#### ثبات اختبار الفهم المفاهيمي للدالة الخطية

وبهدف التحقق من ثبات الاتساق الداخلي للاختبار، فقد استخدمت معادلة كرونباخ ألفا (Cronbach's Alpha) على بيانات العينة الاستطلاعية، والجدول (2): يوضح ذلك:

## جدول (2):

قيم معامل ثبات اختبار الفهم المفاهيمي والإجرائي للدالة الخطية ومهارات التفكير الرياضي بطريقة كرونباخ ألفا

| المجال          | عدد الفقرات | كرونباخ ألفا |
|-----------------|-------------|--------------|
| الفهم المفاهيمي | 6           | .69          |

يتضح من الجدول (2) أن قيمة معامل ثبات كرونباخ ألفا للفهم المفاهيمي بلغت ككل (.69)، حيث تعد هذه القيمة مناسبة، وتجعل من الاختبار قابل للتطبيق على العينة الأصلية.

### ب) البرنامج التعليمي القائم على بيئة تعلم تكاملية باستخدام (GeoGebra) و (Desmos):

قامت الباحثة بتطوير برنامج تعليمي قائم على توظيف بيئة تعلم تكاملية باستخدام برنامجي (GeoGebra) و (Desmos) بهدف تنمية الفهم المفاهيمي والإجرائي للدالة الخطية ومهارات التفكير الرياضي لدى طلبة الصف الثامن الأساسي. وقد أعتمد بناء البرنامج على النموذج العام للتصميم التعليمي (ADDIE)، وفق خمس خطوات أساسية تبدأ بمرحلة التحليل، التصميم، التطوير، التنفيذ، وانتهاء بمرحلة التقييم.

### ج) دليل المعلم

قامت الباحثة بإعداد دليل المعلم لتنفيذ البرنامج التعليمي التكاملية الذي يوظف تطبيقَي (GeoGebra) و (Desmos) في تدريس وحدة الدالة الخطية لطلبة الصف الثامن الذي يعتمد على البرنامج الذي قامت بتطويره، وقد نظمت محتواه في 22 حصة تعليمية، بالتوافق مع المنهج المقرر للدالة الخطية وفق ما تنص عليه وزارة التربية والتعليم، حيث تم تخصيص 45 دقيقة لكل حصة، بدءًا بالتعرّف إلى الدالة الخطية، أنواعها وتمثيلات، ثم ينتقل إلى الميل وعلاقته بنوع الدالة الخطية، والتقاطع مع المحاور الصادي وكذلك المقارنة بين الدوال وتطبيقاتها الحياتية. وشملت هيكله الحصص تحديد الأهداف التعلمية والتطبيقات الرقمية، والأدوار التعليمية، والأخطاء المتوقعة واستراتيجيات علاجها، بجانب التقويم بجميع مراحله. وقامت الأنشطة على الاكتشاف الموجه والربط الشامل بين تمثيلات الدالة الخطية لتنمية الفهم بشقيهِ المفاهيمي والإجرائي ومهارات التفكير الرياضي.

### مصطلحات الدراسة:

تعتمد الدراسة التعريفات الآتية للمصطلحات الواردة فيها:

**جيوجبرا (GeoGebra):** أداة تفاعلية مجانية تُستخدم في تدريس الرياضيات، تدمج بين الجبر والهندسة والإحصاء، وتتيح للطلاب والمعلمين استكشاف المفاهيم الرياضية من خلال التمثيلات البصرية والتفاعلية (Hidayat et al., 2024, p317).

ويعرف الجيوجبرا (GeoGebra) إجرائياً بأنه برمجية تعليمية مجانية يستخدمها الطلبة في هذه الدراسة لاستكشاف مفاهيم الدالة الخطية من خلال الأنشطة التفاعلية والتمثيلات البصرية المبرمجة مسبقاً، والتي تتضمن رسم الدوال وتغيير المعاملات ومراقبة التأثيرات البصرية المباشرة.

**ديسموس (Desmos):** منصة تفاعلية عبر الإنترنت تقدم أدوات للرسم البياني والمعادلات، تُستخدم لتعزيز الفهم المفاهيمي والإجرائي من خلال التفاعل المباشر مع المفاهيم الرياضية (Hakim et al., 2025).

ويعرف ديسموس (Desmos) إجرائياً بأنه منصة إلكترونية تفاعلية يستخدمها الطلبة في هذه الدراسة للتفاعل مع المعادلات والرسوم البيانية للدوال الخطية من خلال واجهة ويب تتيح الرسم المباشر وتعديل المعاملات ومراقبة التغيرات الفورية على الرسم البياني.

**الفهم المفاهيمي:** هو الفهم العلائقي للمفاهيم الرياضية بحيث يدرك المتعلمون أهمية المفهوم وكيف يرتبط هذا المفهوم بمحتوى معين ومهارات ومفاهيم محددة ويشير الفهم المفاهيمي في الرياضيات بشكل عام إلى معرفة أكثر من مجرد حقائق وطرق منعزلة، ورؤية صورة أكبر تكون الحقائق والطرق جزءاً منها (Nuriza & Mahmudah, 2025).

ويُعرّف الفهم المفاهيمي للدالة الخطية إجرائياً بأنه قدرة الطالب على إدراك المعنى الرياضي للدالة الخطية وعناصرها، وفهم العلاقات بين التمثيلات المختلفة (الجبرية، والبيانية، والجدولية، واللفظية)، والقدرة على تفسير الميل والمقطع الصادي وربطهما بالسياقات الحياتية، ويُقاس من خلال الدرجة التي يحصل عليها الطالب في اختبار الفهم المفاهيمي المُعد لهذه الدراسة.

**بيئة التعلم التكاملية:** هي البيئة التعلم التي يزال فيها الحواجز التي تفصل بين المفاهيم النظرية والأنشطة العملية والربط بينها لتحقيق أهداف المنهج.

وتُعرّف إجرائياً بأنه التكامل بين تطبيق GeoGebra وDesmos، وفحص أثره في تنمية الفهم المفاهيمي للدالة الخطية لدى طلبة الصف الثامن.

## الاطار النظري والدراسات السابقة:

### الأسس النظرية لتعليم الرياضيات في البيئات التكنولوجية

#### النظرية البنائية وتطبيقاتها في تعليم الرياضيات الرقمي

تُعد النظرية البنائية من أكثر الأطر النظرية تأثيراً في تصميم بيئات التعلم الحديثة، حيث تقوم على افتراض أساسي مفاده أن المتعلم لا يستقبل المعرفة بصورة سلبية، بل يبنيها بنفسه من خلال تفاعله مع الخبرات والمواقف التعليمية (Schunk, 2012). وقد أسس جان بياجيه لهذه النظرية من خلال نظريته في التطور المعرفي، مؤكداً أن التعلم يحدث عندما يواجه المتعلم تناقضاً معرفياً يدفعه إلى إعادة بناء تصورات السابقة من خلال عمليتي الاستيعاب والمواءمة (Ayman-Nolley, 1978).

وفي سياق تعليم الرياضيات، طور فون جلاسرسفيلد (Glaserfeld, 1995) ما يُعرف بالبنائية الراديكالية، التي تؤكد أن المعرفة الرياضية لا تُكتسب من خلال النقل المباشر من المعلم إلى المتعلم، بل من خلال نشاط المتعلم الذهني في بناء المعاني. وفي العصر الرقمي، غدت البرمجيات التفاعلية كـ(GeoGebra) و(Desmos) تجسيداً عملياً للمبادئ البنائية. فهذه الأدوات توفر للطلبة فرصاً للاستكشاف النشط، والتجريب الرياضي، والتحقق من الفرضيات، ومشاهدة النتائج الفورية لتغيير المعاملات الرياضية (Hohenwarter & Jones, 2007).

#### نظرية التعلم بالوسائط المتعددة ودورها في الفهم الرياضي

تقدم نظرية التعلم بالوسائط المتعددة لماير (Mayer, 2009) إطاراً نظرياً مهماً لفهم كيفية معالجة المتعلمين للمعلومات المقدمة عبر قنوات متعددة. وتفترض هذه النظرية أن التعلم يحدث بصورة أفضل عندما يُقدم المحتوى التعليمي من خلال تكامل بين المعلومات اللفظية والبصرية، بدلاً من الاعتماد على قناة واحدة فقط.

وفي سياق تعليم الدوال الخطية، تتيح البرمجيات التفاعلية تقديم المفهوم من خلال تمثيلات متعددة ومتزامنة: التمثيل الجبري (المعادلة)، والتمثيل البياني (الرسم)، والتمثيل العددي (الجدول)، والتمثيل اللفظي (الوصف). هذا التنوع في التمثيلات يساعد الطلبة على تكوين نموذج ذهني متكامل للدالة الخطية، ويُيسر الانتقال بين التمثيلات المختلفة، وهو ما يُعد مؤشراً على عمق الفهم الرياضي. (Kaput, 1992)

#### نظرية الحمل المعرفي وتصميم البيئات التعليمية الرقمية

تُعد نظرية الحمل المعرفي لسويلر (Sweller, 1988) من الأطر النظرية المهمة في تصميم بيئات التعلم الفعالة. وتفترض هذه النظرية أن الذاكرة العاملة محدودة السعة، وأن التعلم يحدث بصورة مثلى عندما يُصمم المحتوى التعليمي بطريقة تقلل من الحمل المعرفي غير الضروري، وتركز الموارد المعرفية على بناء المخططات المعرفية ودمجها في الذاكرة طويلة المدى (Sweller et al., 2011).

وفي تصميم بيئات التعلم التكاملية باستخدام (GeoGebra) و(Desmos)، يجب مراعاة مبادئ تقليل الحمل المعرفي من خلال: تقديم التعليمات بصورة واضحة ومتدرجة؛ ربط التمثيلات المختلفة بصورة متزامنة لتجنب الانقسام الانتباهي، استخدام الأمثلة المحولة لتقليل العبء على الذاكرة العاملة؛ وتوفير فرص للممارسة الموجهة قبل الانتقال إلى المهام المعقدة (Moreno & Mayer, 2007).

#### الفهم المفاهيمي للدالة الخطية

في سياق الدالة الخطية، يتضمن الفهم المفاهيمي عدة جوانب محورية: فهم الدالة كعلاقة بين متغيرين تربطهما علاقة خطية؛ إدراك معنى الميل كوتيرة تغير ثابتة وليس مجرد رقم في المعادلة؛ فهم التقاطع مع المحور الصادي كنقطة بداية أو قيمة أولية؛ القدرة على الربط بين التمثيل الجبري  $(y = mx + b)$  والتمثيل البياني (المستقيم)؛ وفهم تأثير تغيير قيم  $m$  و  $b$  على شكل وموقع المستقيم (Kim & Cho, 2022).

## دور البرمجيات التفاعلية في تعزيز الفهم المفاهيمي

تُظهر الأبحاث أن البرمجيات التفاعلية كـ(GeoGebra) و(Desmos) تتيح فرصاً فريدة لتنمية الفهم المفاهيمي. حيث تتيح هذه البرمجيات إمكانية التلاعب الديناميكي بالمعاملات ومشاهدة أثر التغيرات لحظياً، بما يعزز الفهم المفاهيمي للعلاقات الرياضية (Chechan et al., 2023; Purba et al., 2026). وقد أكدت دراسة تشيتشان وآخرين (Chechan et al., 2023) أن الطلبة الذين تعلموا الدوال من خلال بيئة Desmos التفاعلية أظهروا مستويات أعلى من الفهم للعلاقات الدالية مقارنة بأقرانهم في الطرق التقليدية.

## الدالة الخطية كمفهوم رياضي

### المكانة المفاهيمية للدالة الخطية في المناهج

تشغل الدالة الخطية موقعاً محورياً ضمن مناهج الرياضيات للمرحلتين الأساسية والثانوية، إذ تمثل حلقة الوصل بين الحساب والجبر، وتُعد بوابة أساسية لفهم مفاهيم أكثر تقدماً، كالدوال التربيعية والأسية واللوغاريتمية والمثلثية (Pittalis et al., 2024). وقد أكد المجلس القومي لمعلمي الرياضيات (NCTM 2000) أن فهم الدوال يندرج ضمن الأفكار الكبرى في الرياضيات، وأن تنمية التفكير الدالي ينبغي أن تبدأ في وقت مبكر من المرحلة الابتدائية، من خلال استكشاف الأنماط والعلاقات.

### المكونات الأساسية لمفهوم الدالة الخطية

يتكون مفهوم الدالة الخطية من عدة مكونات مترابطة يجب على الطالب فهمها وإتقانها:

#### أ. مفهوم الدالة كعلاقة

الدالة الخطية هي علاقة رياضية خاصة بين متغيرين، بحيث لكل قيمة من المتغير المستقل (x) قيمة واحدة ووحيدة من المتغير التابع (y). ويُعد فهم هذه العلاقة أساسياً، لكن الأبحاث تشير إلى أن كثيراً من الطلبة يواجهون صعوبة في التمييز بين الدوال والعلاقات الأخرى (Vinner & Dreyfus, 1989).

وقد أظهرت دراسة نوريزا وآخرون (Nuriza & Mahmudah, 2025) أن فهم الطلبة لمفهوم الدالة يمر بعدة مراحل: من النظر إليها كمعادلة جبرية فقط، إلى فهمها كعلاقة بين المتغيرات، ثم كعملية تحويل، وصولاً إلى فهمها ككائن رياضي يمكن التعامل معه ككل.

#### ب. الميل كوتيرة تغير

يُعد الميل من أهم المفاهيم المرتبطة بالدالة الخطية، وهو يمثل وتيرة التغير الثابتة في y بالنسبة لـ x. ورياضياً، الميل  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ، ويعبر عن درجة انحدار المستقيم. لكن الأبحاث تشير إلى أن كثيراً من الطلبة يحفظون الصيغة دون فهم المعنى المفاهيمي للميل (Stump, 2001).

وقد وسّعت دراسة مور-روسو وزملائها (Moore-Russo et al., 2011) إطار فهم الميل الذي بناه ستيمب (Stump, 2001)، لتصل إلى إحدى عشر وجهاً لفهم الميل، من بينها: الميل كمعامل جبري، كخاصية هندسية (زاوية الانحدار)، كوتيرة تغير دالي، كنسبة مثلثاتية، كمعامل بارامتري، كخاصية فيزيائية واقعية، إضافة إلى الأوجه التي أضافتها الدراسة تحديداً: الخاصية المحددة للتوازي والتعامد، ومؤشر السلوك الدالي (تزايد أو تناقص أو ثبات الدالة)، والثابت الخطي. وأكدت الدراسة أن الفهم الكامل للميل يتطلب استيعاب هذه الأوجه المتعددة مجتمعة، لا الاكتصار على وجه واحد فقط.

#### ج. التقاطع مع المحور y

يمثل التقاطع مع المحور الصادي القيمة الابتدائية للدالة عندما  $x=0$ ، ويُعبر عنه بالرمز b في المعادلة القياسية  $y = mx + b$ . ورغم أن هذا المفهوم يبدو بسيطاً، إلا أن الطلبة غالباً ما يخلطون بين التقاطع مع المحور y والتقاطع مع المحور x، أو يفشلون في تفسير معنى b في سياقات واقعية (Ellis et al., 2021).

#### د. التمثيلات المتعددة للدالة الخطية

يمكن تمثيل الدالة الخطية بطرق متعددة: التمثيل الجبري (المعادلة)، التمثيل البياني (المستقيم)، التمثيل العددي (جدول القيم)، التمثيل اللفظي (الوصف بالكلمات)، والتمثيل السياقي (المواقف الواقعية). وكل تمثيل يبرز جوانب معينة من المفهوم ويخفي أخرى (Janvier, 1987).

وقد أكدت الأبحاث أن القدرة على الانتقال بمرونة بين هذه التمثيلات تُعد مؤشراً قوياً على عمق الفهم المفاهيمي (Brenner et al., 1997). فالطالب الذي يفهم الدالة الخطية فهماً عميقاً يستطيع: كتابة المعادلة من الرسم البياني والعكس؛ تحديد الميل والتقاطع من جدول القيم؛ ترجمة موقف لفظي إلى معادلة أو رسم؛ والتنقل بين هذه التمثيلات حسب متطلبات المسألة.

### جيوجبرا (GeoGebra) كبيئة تعليمية تفاعلية

GeoGebra هو برنامج رياضيات ديناميكي مجاني ومفتوح المصدر، طوره هونوارتر (Hohenwarter et al., 2009) يجمع بين الهندسة والجبر والتحليل في بيئة واحدة متكاملة. ويتميز GeoGebra بعدة خصائص تجعله أداة فعالة في تعليم الرياضيات

أ. **التفاعلية والديناميكية:** يتيح (GeoGebra) للمستخدم التعامل مع الكائنات الرياضية بصورة تفاعلية، حيث يمكن سحب النقاط وتحريك العناصر وملاحظة التغيرات الفورية في جميع التمثيلات المرتبطة. هذه الديناميكية تشجع على الاستكشاف والتجريب وبناء الحدس الرياضي (Ramaila, 2026).

ب. **الربط بين التمثيلات المتعددة:** يعرض (GeoGebra) التمثيلات الجبرية والبيانية والجدولية في وقت واحد، مع تحديث تلقائي لجميع التمثيلات عند تغيير أي منها. هذا يساعد الطلبة على فهم العلاقات بين التمثيلات المختلفة وتطوير مرونة التمثيل (Jerfi & Basuki, 2026)

ج. **سهولة الاستخدام:** على الرغم مما يتمتع به (GeoGebra) من قوة وإمكانات واسعة، فإنه يتميز بواجهة استخدام بسيطة، يستطيع الطلبة والمعلمون تعلمها بسرعة دون حاجة إلى خلفية برمجية متقدمة (Earliand et al., 2026)

د. **المجانية وإمكانية الوصول:** كون (GeoGebra) متاحاً مجاناً بالكامل على مختلف المنصات -ويندوز، وماك، ولينكس، والويب، والأجهزة اللوحية والهواتف الذكية- فإن ذلك يجعله في متناول جميع الطلبة دونما قيود مالية أو تقنية.

### ديسموس (Desmos) كبيئة تعليمية تفاعلية

ديسموس (Desmos) تطبيق ويب مجاني لرسم الدوال والرسوم البيانية، أُطلق عام 2011 بهدف تبسيط تعلم الرياضيات وجعله أكثر يسراً وجاذبية. ويتميز Desmos بتصميمه الأنيق وسهولة توظيفه، وهو ما جعله أداة رائجة في الفصول الدراسية حول العالم (Bhatia & Chakraborty, 2024)

يتمتع Desmos بمجموعة من المزايا التي تعزز من فاعليته في تدريس الرياضيات:

أ. **البساطة والوضوح:** صُمم Desmos وفق فلسفة "البساطة أولاً"، إذ تتيح واجهته النظيفة والبديهية للطلبة التركيز على المحتوى الرياضي دون تشتت. فيمكن للمستخدم كتابة المعادلات مباشرة وملاحظة رسمها البياني يظهر فوراً، بما يُقلص الحواجز التقنية أمام التعلم.

ب. **التمثيل البصري القوي:** يقدم Desmos تمثيلات بيانية دقيقة وواضحة للدوال الرياضية، مع إمكانية التحكم بالألوان والأنماط، بما يساعد الطلبة على تكوين حدس بصري متين حول سلوك الدوال وخصائصها، فضلاً عن دعمه للتكبير والتصغير والتنقل السلس في المستوى الإحداثي.

ج. **المتغيرات المتحركة (Sliders):** تُعد المتغيرات المتحركة من أبرز مزايا Desmos، إذ تُمكن الطلبة من تغيير قيم المعاملات في الدوال بصورة ديناميكية، ومراقبة أثر ذلك على الرسم البياني فوراً، وهو ما يعزز الفهم العميق للعلاقة بين المعاملات والتحويلات الهندسية للدوال (Earliand et al., 2026)

د. **الأنشطة التفاعلية الجاهزة:** يوفر موقع Desmos مكتبة واسعة من الأنشطة الصفية المُعدة بعناية، تشتمل على أسئلة موجهة، ومهام استكشافية، ومحاكاة تفاعلية تحفز التفكير الناقد والمشاركة الفاعلة.

## 2. الدراسات السابقة

يتناول هذا الجزء الدراسات السابقة المتعلقة ببيئة التعلم التكاملية واستخدام تطبيق (GeoGebra) و (Desmos) بما في ذلك الدراسات المرتبطة مباشرة بموضوع الدالة الخطية، مرتبة من الأحدث إلى الأقدم.

حيث هدفت دراسة ازامات (Azamat, 2026) إلى فحص الفاعلية التربوية للمنصات الرقمية التفاعلية في تحسين تعليم الرياضيات ضمن بيئات التعلم الحديثة، وإجراء تحليل مقارن لتطبيقي (GeoGebra) و (Desmos) للكشف عن فاعليتهما في تحسين تعليم الرياضيات وتعزيز التمثيل البصري والتعلم التفاعلي. واتبعت الدراسة منهج التحليل المقارن، حيث تمثلت عينة الدراسة في الأدبيات والدراسات التجريبية المحكّمة والصادرة خلال الفترة من (2020 إلى 2026)، واستُخدمت أطر التحليل والمقارنة الأكاديمية كأداة لفحص وتصنيف الخصائص التربوية والتكنولوجية للمنصتين، وأشارت النتائج أن تطبيق (GeoGebra) يتفوق في النمذجة ثلاثية الأبعاد، وتطبيقات نظام الحساب الآلي (CAS)، والدمج بين

الجبر والهندسة، في حين يتميز برنامج (Desmos) بسهولة الاستخدام والوصول، والتفاعل الفوري، ودعم التقييم التكويني وإدارة التعلم الصفي، وأوصت الدراسة بتبني مدخل تدريسي مدمج يجمع بين التطبيقين لتعزيز الفهم طويل الأمد لدى الطلبة، وزيادة تفاعلهم، وتطوير مهاراتهم في حل المشكلات بالرياضيات.

في حين هدفت دراسة فوزي وآخرين (Fauzi et al., 2026) إلى فحص اتجاهات الأبحاث المتعلقة بالثقافة الرياضية لدى الطلبة في تعليم الرياضيات المدعوم ببرنامج (GeoGebra) بشكل منهجي في إطار مستجدات التعلم للقرن الحادي والعشرين، واتبعت الدراسة منهج المراجعة المنهجية للأدبيات (SLR - Systematic Literature Review)، حيث تكونت عينة الدراسة من (12) مقالاً علمياً محكماً صادراً خلال الفترة الممتدة من (2020 إلى 2025)، وأظهرت نتائج الدراسة تزايد الاهتمام البحثي ببرنامج (GeoGebra) خلال السنوات الخمس الأخيرة، مع التركيز على تعزيز الثقافة الرياضية عبر نماذج تعليمية مبتكرة متنوعة، وقد شملت: التعلم القائم على المشكلات، والتعلم القائم على المشاريع، والتعلم بالاستكشاف، والتعليم الرياضي الواقعي، واستراتيجية (فكر-تحدث-اكتب)، ومشروع ميسوري للرياضيات، وخلصت الدراسة إلى أن تعليم الرياضيات المدعوم ببرنامج (GeoGebra) يسهم في تحسين الثقافة الرياضية لدى الطلبة بشكل مستدام وبما يتوافق مع متطلبات التعلم في القرن الحادي والعشرين.

أشارت دراسة رامايلا (Ramaila, 2026) إلى فحص أثر توظيف تطبيق (GeoGebra) التفاعلي في تعزيز عمليتي التعليم والتعلم في مادة الرياضيات عبر سياقات تعليمية متنوعة، وبيان انعكاسه على الفهم المفاهيمي واندماج الطلبة ومهاراتهم في حل المشكلات. واعتمدت الدراسة منهج المراجعة المنهجية، إذ تألفت عينتها من الأبحاث والدراسات المحكّمة التي صدرت خلال العقد الأخير، وتناولت الممارسات الصفية وخبرات المعلمين الميدانية، فيما اعتمدت إجراءات البحث المنهجي المعمول بها في قواعد البيانات الأكاديمية أداةً لجمع الأبحاث وتحليلها. وقد كشفت نتائج الدراسة أن توظيف (GeoGebra) يُسهم في تعزيز الفهم المفاهيمي لدى الطلبة، وزيادة تفاعلهم الصفي، وتنمية مهاراتهم في حل المشكلات، وذلك من خلال ما يوفره من بيئة تعلم تفاعلية. كما كشفت النتائج، في المقابل، عن جملة من التحديات تمثلت في قصور تدريب المعلمين على توظيف التطبيق، ومحدودية الوصول إلى الموارد التكنولوجية اللازمة، وضعف الاتساق بينه وبين متطلبات المناهج الدراسية. وفي ضوء ذلك، أوصت الدراسة بتوفير برامج تطوير مهني موجهة للمعلمين، وتحسين البنية التحتية التكنولوجية في المدارس، وتوسيع نطاق دمج التطبيق ضمن المقررات الدراسية.

وقد أجرى القحطاني والشهراني (2025) دراسة استهدفت الكشف عن تصورات معلمي الرياضيات في المرحلة الابتدائية إزاء توظيف تطبيق (Desmos) في تدريس الرياضيات، معتمدين المنهج النوعي. وتألفت عينة الدراسة من (20) معلماً للرياضيات في المرحلة الابتدائية بمدينة بيشة، اختيروا بطريقة قصدية، فيما تمثلت أداة الدراسة في المقابلة شبه المنظمة لجمع البيانات. وأشارت النتائج إلى أن توظيف تطبيق (Desmos) في تدريس الرياضيات يكاد يكون منعدياً، إذ أفاد معظم المعلمين بأن معرفتهم بالتطبيق لا تتجاوز السطح. كما كشفت النتائج عن جملة من المعوقات، أبرزها ضعف المهارات التقنية واللغوية لدى المعلمين، وميلهم إلى أساليب التدريس التقليدية، فضلاً عن مشكلات تتصل بالبنية التحتية والدعم الإداري في المدارس. وقد أوصت الدراسة بتقديم برامج تدريبية للمعلمين، وإعداد دليل للأنشطة التفاعلية يدعم توظيف (Desmos) في تدريس الرياضيات.

وسعت دراسة نونيز- غوتيريس وآخرين (Nuñez-Gutierrez et al., 2025) إلى تحليل التفكير التغيري لدى طلبة المرحلة الثانوية من خلال مختبر تعليمي متخصص في الدالة الخطية، واتبعت الدراسة المنهج النوعي القائم على التصميم من خلال ثلاث مراحل (اختبار تشخيصي، وتطبيق المختبر الرياضي، واختبار نهائي)، وتكونت عينة الدراسة من طلبة المرحلة الثانوية في إحدى المؤسسات التعليمية الحكومية بمدينة بارانكويا الكولومبية، واعتمدت الدراسة على إعداد اختبار تشخيصي كشف عن صعوبات في مفهوم الدالة الخطية والنمذجة، وتصميم مختبر رياضيات تضمن (8) أنشطة ركزت على مفهوم الدالة، والتحويل بين التمثيلات المختلفة (اللفظية، والعديدية، والبيانية، والجبرية)، بالإضافة إلى تطبيق اختبار نهائي، وأظهرت نتائج الدراسة وجود تقدم ملحوظ في التفكير التغيري لدى الطلبة، وتعزيز قدرتهم على الربط بين التمثيلات الرياضية المختلفة وفهم مفاهيم الدالة الخطية.

وكشفت دراسة كل من أوكتافيا وإريتا (Oktafia & Erita, 2025) عن أثر دمج تطبيق (GeoGebra) و (Desmos) في تعليم مادة الهندسة التحليلية على قدرة التفكير التأملي الرياضي لدى الطلبة، واتبعت الدراسة المنهج الكمي التجريبي بتصميم المجموعة الضابطة العشوائية بتطبيق بعدي، وتكونت عينة الدراسة من (27) طالباً وطالبة من طلبة المستوى الثالث في برنامج تعليم الرياضيات بجامعة (IAIN Kerinci)، تم تقسيمهم إلى مجموعتين: تجريبية مكونة من (14) طالباً درسوا باستخدام دمج التطبيقين، وضابطة مكونة من (13) طالباً درسوا بالطريقة التقليدية، واستُخدم اختبار مقالي لقياس التفكير التأملي الرياضي، وبلغ معامل ثباته باستخدام ألفا كرونباخ 0.958. وأظهرت النتائج وجود فروق دالة إحصائية لصالح المجموعة التجريبية، مما يؤكد فاعلية الدمج بين GeoGebra و Desmos في تنمية التفكير التأملي الرياضي لدى الطلبة في الهندسة التحليلية.

وتناولت دراسة شيشان وآخرين (Chechan et al., 2023) أثر استخدام برنامج (Desmos) على أداء الطلاب في تعلم الدوال. تم اعتماد تصميم بحثي مختلط مدمج، وتكونت عينة الدراسة من 98 طالباً من مدرسة ثانوية عليا في السويد. واعتمدت الدراسة على اختبارات تقييم القبلية والبعدية، وكذلك استطلاعات للرأي، أظهرت النتائج أن كلا المجموعتين التجريبية والضابطة حققتا تحسناً ملحوظاً في نتائج الاختبار البعدي مقارنة بالاختبار القبلي. ومع ذلك، حققت المجموعة التجريبية تحسناً ذا دلالة إحصائية أعلى مقارنة بالمجموعة الضابطة، وذلك عبر المحاور الخمسة التي تناولتها الدراسة، كما بينت النتائج النوعية أن استخدام تطبيق (Desmos) أسهم على فهمهم العام لمفاهيم الدوال، وقدرتهم على تحليل الدوال والتحقق من إجاباتهم من خلال التصور البصري، مما يؤكد فاعلية البرنامج في دعم تعلم الدوال.

كما وسعت دراسة عيد وآخرون (2022) إلى التعرف على أثر تدريس الرياضيات في ضوء مدخل التعلم التكاملي CLIL، وقياس أثرها في تنمية مهارات حل المشكلات لتلاميذ. واستخدم البحث المنهج التجريبي بتصميمه شبه التجريبي المكون من المجموعتين التجريبية والضابطة، وتكونت عينة البحث من 54 تلميذاً من تلاميذ الصف السادس الابتدائي بمدرسة مطروح الرسمية المتميزة للغات، وتم اختيارهم عشوائياً، وقد تم تطبيق اختبار مهارات حل المشكلات الهندسية قبلياً على عينة البحث بهدف التأكد من تكافؤ المجموعتين في مهارات حل المشكلات الهندسية، وبعدياً بهدف تعرف الفرق بين التطبيقين القبلي والبعدي لأداة البحث، وأظهرت نتائج الدراسة وجود فروق دالة إحصائية بين المجموعتين في التطبيق البعدي لصالح المجموعة التجريبية، مما يؤكد فاعلية مدخل التعلم التكاملي (CLIL) في تنمية مهارات حل المشكلات الهندسية.

وقدمت دراسة بيرغين وأوزون يازيغي (Birgin & Uzun Yazıcı, 2021) تصوراً مقترحاً إلى استقصاء أثر استخدام برمجية الهندسة الديناميكية (GeoGebra) في تنمية الفهم المفاهيمي والاحتفاظ بالتعلم المتعلق بالمعادلات الخطية والميل لدى طلبة الصف الثامن. اعتمدت الدراسة تصميماً شبه تجريبي تضمن اختباراً قبلياً، واختباراً بعدياً، واختباراً مؤجلاً. وقد أجريت الدراسة على عينة مكونة من (52) طالباً تركياً من الصف الثامن، حيث ضمت المجموعة التجريبية (25) طالباً، في حين ضمت المجموعة الضابطة (27) طالباً. تلقت المجموعة التجريبية تدريباً مدعوماً ببرمجية (GeoGebra)، بينما استمر التدريس المباشر القائم على الكتاب المدرسي في المجموعة الضابطة. جُمعت البيانات باستخدام اختبار الفهم المفاهيمي (CUT) الذي تألف من (38) سؤالاً متنوعاً بين أسئلة مفتوحة، واختيار من متعدد، وملء الفراغات. وقد طُبّق اختبار CUT على المجموعتين قبلياً وبعدياً في بداية التدريس ونهايته، كما أعيد تطبيقه بعد مرور سبعة أسابيع باعتباره اختباراً للاحتفاظ بالتعلم. وأظهرت نتائج الدراسة أن التدريس المدعوم ببرمجية (GeoGebra) في موضوع المعادلات الخطية والميل قد أسهم بدرجة دالة إحصائية في كل من الفهم المفاهيمي وبقاء أثر التعلم لدى طلاب الصف الثامن مقارنة بالتعليم المباشر القائم على الكتاب المدرسي.

### 3. منهج الدراسة:

انطلاقاً من طبيعة الدراسة الحالية والمعلومات المراد الحصول عليها، ولتحقيق أهدافها بالشكل الذي يتضمن الدقة والموضوعية، استخدم المنهج التجريبي بتصميمه شبه التجريبي (Quasi-experimental Design) من أجل تقصي فاعلية برنامج تعليمي قائم على بيئة تعلم تكاملية باستخدام (GeoGebra) و (Desmos) في تنمية الفهم المفاهيمي للدالة الخطية لدى طلبة الصف الثامن، ويمتاز هذا النوع من التصميمات البحثية بقدرته على الموازنة بين متطلبات الضبط العلمي والقيود العملية التي تفرضها البيئة المدرسية، مما يجعله مناسباً لموضوع الدراسة.

### البرنامج التعليمي القائم على بيئة تعلم تكاملية باستخدام (GeoGebra) و (Desmos):

قامت الباحثة بتطوير برنامج تعليمي قائم على توظيف بيئة تعلم تكاملية باستخدام برنامجي (GeoGebra) و (Desmos) بهدف تنمية الفهم المفاهيمي للدالة الخطية لدى طلبة الصف الثامن. وقد اعتمد بناء البرنامج على النموذج العام للتصميم التعليمي (ADDIE)، وفق خمس خطوات أساسية تبدأ بمرحلة التحليل وانتهاء بمرحلة التقييم.

#### 1- مرحلة التحليل (Analysis):

قامت الباحثة بتحليل خصائص واحتياجات طلبة الصف الثامن التعليمية في موضوع الدالة الخطية من خلال تحديد احتياجاتهم ومراجعة الأدبيات المتعلقة بموضوع الدالة الخطية وتطبيقات (GeoGebra) و (Desmos).

#### 2- مرحلة التصميم (Design):

تم اعداد مخطط تعليمي تفاعلي يوظف فيه تطبيق (GeoGebra) و (Desmos) يتلاءم مع أهداف تعلم الدالة الخطية من خلال: تصميم أنشطة ومهام تعليمية تفاعلية، ودمج مهارات التفكير الرياضي، وتنظيم المسار التعليمي عن طريق تحديد خطة زمنية.

#### 3- مرحلة التطوير (Development):

- قامت الباحثة بتطوير محتوى رقمي يساعد في تطبيق البرنامج من خلال: اعداد دليل تعليمي للمعلم، بناء أنشطة تطبيقية تدريبية، وإنتاج وسائط رقمية مساعدة.

#### 4- التنفيذ (Implementation):

- قامت الباحثة بتطبيق البرنامج على العينة المستهدفة من خلال: جلسات تمهيدية تعرف وتوضح كيفية استخدام التطبيقين، وتعلم تكاملي المدعوم بالتطبيقات الرقمية بهدف استكشاف خصائص الدالة الخطية، وأنشطة عملية لكيفية استخدام التطبيقين في تمثيلات الدالة الخطية وتغيير بارمتراتهما عبر المنزقات.

#### 5- التقييم:

- اختُتم البرنامج بمرحلة تقييم شاملة لقياس أثره في تنمية الفهم المفاهيمي والإجرائي للدالة الخطية ومهارات التفكير الرياضي لدى الطلبة من خلال: التقييم التكويني، التقييم الختامي، قياس التحسن.

#### صدق محتوى البرنامج التعليمي القائم على بيئة تعلم تكاملية باستخدام (GeoGebra) و (Desmos):

قامت الباحثة بعرض البرنامج التعليمي على مجموعة من معلمي الرياضيات من أعضاء هيئة التدريس ذو الخبرة في المجال، بهدف التأكد من ملاءمته للأهداف التعليمية المراد تحقيقها. وبلغ عددهم (10) معلمين. وقد قام المعلمون بتقييم مدى وضوح المحتوى، وملاءمة الأنشطة التعليمية، ومدى مناسبتها لطلبة الصف الثامن، مع الأخذ بالملاحظات والتعديلات المقترحة لتحسين البرنامج وضمان صلاحيته للتطبيق، وقد أجريت التعديلات التي أوصى بها المعلمون.

#### 4. 4.2 تصميم الدراسة ومتغيراتها

استخدمت الدراسة المنهج التجريبي بتصميمه شبه التجريبي للمجموعتين (تجريبية وضابطة) مع تطبيق القياس القبلي (Pre-test) والقياس البعدي (Post-test) وقياس المتابعة (Follow-up Measurement).

وقد تم تطبيق التصميم وفق الآتي:

**المجموعة التجريبية:** خضعت للقياس القبلي، ثم تلقت البرنامج التعليمي، ثم القياس البعدي مباشرة بعد الانتهاء من البرنامج، وأخيراً قياس المتابعة بعد مرور (7) أسابيع من التطبيق البعدي؛ بهدف الكشف عن مدى استمرارية أثر البرنامج.

**المجموعة الضابطة:** درست بالطريقة العادية وخضعت للقياس القبلي والقياس البعدي فقط.

#### متغيرات الدراسة

اشتملت الدراسة على المتغيرات المستقلة والتابعة الآتية:

**أولاً- المتغير المستقل (المعالجة):** البرنامج التعليمي القائم على بيئة تعلم تكاملية باستخدام (GeoGebra) و (Desmos).

**ثانياً- المتغير التابع (النتيجة):** درجات أفراد الدراسة في الفهم المفاهيمي للدالة الخطية.

#### 5. عرض نتائج الدراسة

يتناول هذا الفصل عرضاً للنتائج التي توصلت إليها الدراسة في ضوء أسئلتها التي تم طرحها، وقد نظمت وفقاً لمنهجية محددة في العرض.

#### 6. النتائج المتعلقة بالسؤال الأول

هل توجد فروق ذات دلالة إحصائية بين متوسطات درجات أفراد المجموعة التجريبية ودرجات أفراد المجموعة الضابطة على اختبار الفهم المفاهيمي للدالة الخطية لدى طلبة الصف الثامن الأساسي في مدارس الداخل الفلسطيني بعد تطبيق البرنامج التعليمي القائم على بيئة تعلم تكاملية باستخدام (GeoGebra) و (Desmos) تعزى إلى المجموعة (تجريبية، ضابطة) والجنس (ذكر، أنثى) والتفاعل الثنائي بينهما؟

للإجابة على السؤال، حُسبت المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية لدرجات أفراد الدراسة طلبة المجموعة التجريبية (الذين درسوا باستخدام بيئة التعلم التكاملية القائمة على برنامجي GeoGebra و Desmos)، وطلبة المجموعة الضابطة (الذين درسوا بالطريقة الاعتيادية)، على اختبار الفهم المفاهيمي للدالة الخطية في القياس البعدي وفقاً إلى متغيري المجموعة والجنس، ونتائج الجدول (3) تبين ذلك:

### جدول (3):

| المجموعة الجنس | العدد     | القياس البعدي   |                   |
|----------------|-----------|-----------------|-------------------|
|                |           | المتوسط الحسابي | الانحراف المعياري |
| ذكر            | 14        | 21.07           | 5.942             |
| أنثى           | 16        | 20.63           | 7.274             |
| <b>المجموع</b> | <b>30</b> | <b>20.83</b>    | <b>6.576</b>      |
| ذكر            | 14        | 20.36           | 8.196             |
| أنثى           | 16        | 20.31           | 5.907             |
| <b>المجموع</b> | <b>30</b> | <b>20.33</b>    | <b>6.940</b>      |

يتضح من الجدول (3) وجود فروق ظاهرية بين متوسطي أداء المجموعتين: التجريبية والضابطة على اختبار الفهم المفاهيمي للدالة الخطية في القياس (البعدي)، وللتحقق من جوهرية الفرق الظاهري؛ استخدم تحليل التباين المصاحب الثنائي مع تفاعل (Two-Way ANCOVA with Interaction) للقياس البعدي للاختبار، وفقاً للمجموعة بعد تحديد أثر القياس القبلي لديهم، وقد استوفى الاختبار افتراضاته، حيث أظهر اختبار ليفين (Levene's Test) لتجانس تباينات الأخطاء للمتغير التابع، عدم وجود فروق دالة في تباين الخطأ بين المجموعات ( $F(3, 56) = 2.084, p = .113$ ) ما يشير إلى تحقق افتراض تساوي التباين، والجدول يوضح نتائج تحليل التباين المصاحب (4):

### جدول (4):

| مصدر التباين     | مجموع المربعات | درجات الحرية | متوسط المربعات | قيمة F المحسوب | قيمة الدلالة | حجم الأثر $\eta^2$ |
|------------------|----------------|--------------|----------------|----------------|--------------|--------------------|
| القبلي (مصاحب)   | 1168.689       | 1            | 1168.689       | 43.412         | .000         | .441               |
| المجموعة         | 29.920         | 1            | 29.920         | 1.111          | .296         | .020               |
| الجنس            | 19.131         | 1            | 19.131         | .711           | .403         | .013               |
| المجموعة x الجنس | 18.222         | 1            | 18.222         | .677           | .414         | .012               |
| الخطأ            | 1480.641       | 55           | 26.921         |                |              |                    |
| الكلية           | 28075.000      | 60           |                |                |              |                    |
| الكلية المصحح    | 2654.583       | 59           |                |                |              |                    |

\*دال إحصائياً عند مستوى الدلالة ( $p < .05$ )

يتضح من الجدول (4) الآتي:

- عدم وجود فروق دالة إحصائية عند مستوى الدلالة ( $\alpha = .05$ )، تعزى إلى متغير المجموعة (التجريبية، الضابطة) في القياس البعدي للفهم المفاهيمي للدالة الخطية بعد تحديد أثر القياس القبلي، حيث بلغت قيمة (ف) المحسوبة (1.111)، وبدلالة إحصائية ( $p = .296$ )، وبحجم أثر صغير ( $\eta^2 = .020$ )، مما يشير إلى عدم وجود أثر دال للمعالجة التجريبية في تحسين الفهم المفاهيمي مقارنة بالمجموعة الضابطة.

- لم تظهر فروق دالة إحصائية تعزى إلى متغير الجنس، حيث بلغت قيمة (ف) المحسوبة (0.711)، وبدلالة إحصائية ( $p = 0.403$ )، وبحجم أثر صغير ( $\eta^2 = 0.013$ )، مما يدل على عدم وجود اختلاف بين الذكور والإناث في مستوى الفهم المفاهيمي للدالة الخطية بعد ضبط أثر القياس القبلي.
- لم يظهر أثر دال إحصائياً للتفاعل الثنائي بين المجموعة والجنس، حيث بلغت قيمة (ف) المحسوبة (0.677)، وبدلالة إحصائية ( $p = 0.414$ )، وبحجم أثر صغير ( $\eta^2 = 0.012$ )، مما يشير إلى أن أثر المعالجة التجريبية كان متسقاً لدى الذكور والإناث، ولم يختلف باختلاف الجنس.

#### 7. النتائج المتعلقة بالسؤال الثاني

هل توجد فروق ذات دلالة إحصائية بين متوسطات درجات أفراد المجموعة التجريبية في القياسين القبلي والبعدي على اختبار الفهم المفاهيمي للدالة الخطية تعزى للبرنامج التعليمي القائم على بيئة تعلم تكاملية باستخدام (GeoGebra) و (Desmos)؟

للإجابة على السؤال، حُسبت المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية لأداء أفراد المجموعة التجريبية على القياس القبلي والقياس البعدي، واستخدم اختبار (ت) للمجموعات المترابطة (Paired Sample t-test)، وذلك للكشف عن فاعلية برنامج تعليمي قائم على بيئة تعلم تكاملية باستخدام (GeoGebra) و (Desmos) في تنمية الفهم المفاهيمي للدالة الخطية لدى طلبة الصف الثامن، ونتائج الجدول (5) تبين ذلك:

**جدول (5):**

| المتغير                | القياس | العدد | المتوسط الحسابي | الانحراف المعياري | درجات الحرية | قيمة (ت) | مستوى الدلالة |
|------------------------|--------|-------|-----------------|-------------------|--------------|----------|---------------|
| الفهم المفاهيمي للدالة | قبلي   | 30    | 5.63            | 1.829             | 29           | -13.884  | 0.000*        |
| الخطية                 | بعدي   | 30    | 20.83           | 6.576             |              |          |               |

\*دال إحصائياً عند مستوى الدلالة ( $p < 0.05$ ) القيمة الحرجة لاختبار (ت) =  $2.045 \pm$  عند درجات حرية = 29

يتضح من الجدول (5) أن قيمة مستوى الدلالة المحسوب على اختبار الفهم المفاهيمي للدالة الخطية كانت؛ أقل من قيمة مستوى الدلالة المحدد للدراسة ( $\alpha = 0.05$ )، وبالتالي وجود فروق في الفهم المفاهيمي للدالة الخطية لدى أفراد الدراسة بين القياسين القبلي والبعدي، إذ يلاحظ أن متوسط أداء أفراد المجموعة التجريبية في القياس القبلي (5.63) وعلى القياس البعدي (20.83)، وهذا يشير إلى وجود فروق لصالح القياس البعدي، ما يعني وجود فاعلية للبرنامج التعليمي المطبق في تنمية الفهم المفاهيمي للدالة الخطية لدى طلبة الصف الثامن في مدارس الداخل الفلسطيني.

#### 8. النتائج المتعلقة بالسؤال الثالث

هل توجد فروق ذات دلالة إحصائية عند مستوى الدلالة ( $\alpha = 0.05$ ) بين متوسطات درجات أفراد المجموعة التجريبية في القياسين البعدي والمؤجل على اختبار تنمية الفهم المفاهيمي للدالة الخطية لدى طلبة الصف الثامن الأساسي في مدارس الداخل الفلسطيني تعزى لفاعلية البرنامج القائم على بيئة تعلم تكاملية باستخدام (GeoGebra) و (Desmos)؟

للإجابة على السؤال، حُسبت المتوسطات الحسابية والانحرافات المعيارية لأداء أفراد المجموعة التجريبية على القياس البعدي والمؤجل، واستخدم اختبار (ت) للمجموعات المترابطة (Paired Sample t-test)، وذلك للكشف عن فاعلية برنامج تعليمي قائم على بيئة تعلم تكاملية باستخدام (GeoGebra) و (Desmos) في تنمية الفهم المفاهيمي للدالة الخطية لدى طلبة الصف الثامن الأساسي في مدارس الداخل الفلسطيني، ونتائج الجدول (6) تبين ذلك:

#### جدول (6):

| المتغير                | القياس | العدد | المتوسط الحسابي | الانحراف المعياري | درجات الحرية | قيمة (ت) | مستوى الدلالة |
|------------------------|--------|-------|-----------------|-------------------|--------------|----------|---------------|
| الفهم المفاهيمي للدالة | البعدي | 30    | 20.83           | 6.576             | 29           | -2.138   | 0.041*        |
| الخطية                 | المؤجل | 30    | 23.17           | 7.008             |              |          |               |

\*دال إحصائياً عند مستوى الدلالة ( $p < 0.05$ ) القيمة الحرجة لاختبار (ت) =  $2.045 \pm$  عند درجات حرية = 29

يتضح من الجدول (6) وجود فروق دالة إحصائية عند مستوى الدلالة ( $\alpha = 0.05$ ) بين القياسين البعدي والمؤجل في اختبار الفهم المفاهيمي للدالة الخطية لدى أفراد المجموعة التجريبية، حيث بلغت قيمة (ت) المحسوبة (-2.138)، وبلغ مستوى الدلالة (0.041)، وهي أقل من مستوى الدلالة المعتمد في الدراسة (0.05)، ويلاحظ أن المتوسط الحسابي لأداء أفراد المجموعة التجريبية ارتفع من (20.83) في القياس البعدي إلى (23.17) في القياس المؤجل، مما يشير إلى تحسن مستوى الفهم المفاهيمي للدالة الخطية لدى الطلبة بعد فترة المتابعة. وتدل هذه النتيجة على استمرار أثر البرنامج التعليمي، بل ووجود تحسن إضافي في مستوى الفهم المفاهيمي لدى أفراد المجموعة التجريبية بعد انتهاء تطبيق البرنامج، الأمر الذي يعكس استدامة أثر البرنامج في تنمية الفهم المفاهيمي للدالة الخطية.

## 9. مناقشة النتائج

### 10. مناقشة نتائج السؤال الأول

نصّ السؤال الأول: "هل توجد فروق ذات دلالة إحصائية بين متوسطات درجات أفراد المجموعة التجريبية ودرجات أفراد المجموعة الضابطة على اختبار الفهم المفاهيمي للدالة الخطية لدى طلبة الصف الثامن في مدارس الداخل الفلسطيني بعد تطبيق البرنامج التعليمي القائم على بيئة تعلم تكاملية باستخدام (GeoGebra) و (Desmos) تعزى إلى المجموعة (تجريبية، ضابطة) والجنس (ذكر، أنثى) والتفاعل الثنائي بينهما؟"

أظهرت النتائج بعد جمع البيانات ومعالجتها إحصائياً باستخدام تحليل التباين المصاحب الثنائي مع التفاعل، عدم وجود فروق دالة إحصائية عند مستوى الدلالة ( $\alpha \leq 0.05$ ) بين متوسطي درجات المجموعتين التجريبية والضابطة على اختبار الفهم المفاهيمي للدالة الخطية في القياس البعدي، إذ بلغت قيمة (ف) المحسوبة (1.111) وبحجم أثر صغير ( $\eta^2 = 0.020$ ) كما أظهرت النتائج عدم وجود فروق دالة إحصائية تعزى لمتغير الجنس (ف = 0.013، 711. =  $\eta^2$ )، وعدم وجود أثر دال للتفاعل الثنائي بين المجموعة والجنس (ف = 0.012، 677. =  $\eta^2$ ).

تفسّر الباحثة عدم ظهور فروق دالة إحصائية بين المجموعتين التجريبية والضابطة على اختبار الفهم المفاهيمي للدالة الخطية لأسباب عديدة من أهمها؛ أن الفهم المفاهيمي بطبيعته معرفة غنية بالعلاقات تتميز بترابط المفاهيم وتكاملها ضمن شبكة معرفية متماسكة، وهذا النوع من المعرفة لا يُبنى بمجرد التعامل مع التطبيق أو التفاعل معه لفترة محدودة، بل يتطلب من المتعلم المرور بحالة من التناقض المعرفي (cognitive conflict) تدفعه إلى إعادة بناء تصورات السابقة عن الدالة الخطية عبر عمليتي الاستيعاب والمواءمة (Ayman-Nolley, 1978)؛ وهي عملية بنائية تراكمية تحتاج إلى وقت أطول من فترة تطبيق البرنامج الحالي كي تكتمل وتظهر آثارها بصورة دالة إحصائية عند المقارنة المباشرة بين المجموعتين. على الرغم من أن طلاب المجموعة التجريبية قاموا بخوض تجربة نشطة لاستكشاف الدوال وتفاعلوا مع معاملات الدالة في بيئتي GeoGebra و Desmos، حيث شاهدوا تأثير التعديلات على قيم الميل والتقاطع بشكل لحظي، إلا أن هذا لا يعني بالضرورة أن فهم هذه العلاقات بعمق وترسيخها في بنية مفاهيمية متماسكة يحدث بنفس السرعة التي تحدث بها الملاحظة البصرية. هناك فجوة زمنية بين اللحظة التي يُلاحظ فيها التغيير واللحظة التي يُفهم فيها معرفياً.

ويجد هذا التفسير سنداً في نظرية الحمل المعرفي لسويلر (Sweller, 1988)، التي تميز بين نوعين من الحمل: الحمل الجوهري الناتج عن طبيعة المحتوى نفسه، والحمل الإضافي المرتبط بكيفية تقديم المعلومات. من هذا المنطلق، فإن الفهم المفاهيمي للدالة الخطية - والذي يتطلب فهم الميل كوحدة تغير ثابتة وليس مجرد قيمة رياضية في المعادلة، وفهم نقطة التقاطع كقيمة ابتدائية ذات دلالة، بالإضافة إلى القدرة على الربط بين التمثيلات الجبرية والبيانية - يستدعي مستوى عالٍ نسبياً من الحمل المعرفي الجوهري. وهذا ما يميزه عن تنفيذ إجراءات روتينية، كرسم المستقيم أو حساب قيمة  $y$ ، والتي يمكن للطلاب إتقانها بوتيرة أسرع، من خلال التكرار المباشر داخل البيئة التفاعلية نفسها.

وترى الباحثة أن عدم وجود اختلافات إحصائية بارزة بين المجموعتين في هذا الجانب لا يجب أن يعتبر دليلاً على عدم فعالية البرنامج التعليمي في تعزيز الفهم المفاهيمي بشكل عام. فالملاحظات المستمرة لارتفاع أداء المجموعة التجريبية في هذا الاختبار بعد القياسات اللاحقة تشير إلى تفسير مختلف.

أما فيما يتعلق بعدم وجود فروق دالة إحصائية تعزى لمتغير الجنس أو للتفاعل الثنائي بينه وبين المجموعة، فتفسّر الباحثة هذه النتيجة في ضوء خصائص البرمجيات المستخدمة ذاتها؛ فكون (GeoGebra) برنامجاً مجانياً ومفتوح المصدر ومتاحاً على مختلف المنصات (ويندوز، ماك، لينكس، الويب، الأجهزة اللوحية والهواتف الذكية) دون قيود مالية أو تقنية (Hohenwarter & Jones, 2007) وكون (Desmos) مصمماً بفلسفة "البساطة أولاً" التي تتيح واجهة نظيفة وبديهية تتيح للطلبة التركيز على المحتوى الرياضي دون تشتت تقني (Hohenwarter & Jones, 2007)، يجعل الاستفادة من هذه البيئات مرتبطة بطبيعة المهمة المعرفية المطروحة لا بجنس المتعلم. فكل الجنسين يتعامل مع الأداة بالسهولة والانفتاح ذاته، ولا يوجد ما يشير في تصميم هذه البرمجيات إلى انحياز نحو أسلوب تعلم معين قد يناسب أحد الجنسين دون الآخر، وهذا يفسر اتساق أداء الطلبة والطالبات على حدٍ سواء في مستوى الفهم المفاهيمي المتحقق - أو المحدود - بعد تطبيق البرنامج.

## 11. مناقشة نتائج السؤال الثاني

نص السؤال الرابع: "هل توجد فروق ذات دلالة إحصائية بين متوسطات درجات أفراد المجموعة التجريبية في القياسين القبلي والبعدي على اختبار الفهم المفاهيمي للدالة الخطية تعزى للبرنامج التعليمي القائم على بيئة تعلم تكاملية باستخدام (GeoGebra) و (Desmos)؟"

أظهرت النتائج، باستخدام اختبار (ت) للعينات المترابطة، ارتفاعاً دالاً إحصائياً كبيراً في متوسط أداء المجموعة التجريبية على اختبار الفهم المفاهيمي للدالة الخطية، إذ ارتفع المتوسط الحسابي من (5.63) في القياس القبلي إلى (20.83) في القياس البعدي، بقيمة (ت) محسوبة بلغت (-13.884) وهي دالة إحصائية عند مستوى الدلالة ( $\alpha = .000$ ).

تفسر الباحثة هذا الفرق بأن البرنامج التعليمي أحدث أثراً ذاتياً واضحاً وقوياً في تنمية الفهم المفاهيمي لدى أفراد المجموعة التجريبية أنفسهم، بصرف النظر عن مقارنته بأداء المجموعة الضابطة التي تلقت بدورها تدريساً اعتيادياً قد لا يخلو هو الآخر من فرص لتنمية الفهم المفاهيمي. ويتسق هذا التفسير مع جوهر الطرح البنائي عند فون جلاسرسفيلد (von Glasersfeld, 1995) الذي يرى أن المعرفة الرياضية لا تنتقل مباشرة من المعلم إلى المتعلم، بل تتشكل من خلال نشاط ذهني يقوم به المتعلم ذاته في بناء المعاني. فالانتقال من متوسط منخفض جداً في القياس القبلي (5.63) - وهو ما يعكس غياباً يكاد يكون تاماً للفهم المفاهيمي لدى الطلبة قبل التطبيق - إلى مستوى متوسط في القياس البعدي (20.83)، يدل على أن الطلبة انخرطوا فعلياً في بناء معارفهم بأنفسهم، لا في تلقّيها بصورة سلبية.

ويمكن تفسير حدة هذا التحسن في ضوء ما توفره بيئة (GeoGebra) و (Desmos) من فرص للاستكشاف والنشاط والتجريب الرياضي ومشاهدة النتائج الفورية لتغيير المعاملات الرياضية (Hohenwarter & Jones, 2007) وهي فرص لم تكن متاحة للطلبة قبل التطبيق، مما يفسر الفارق الكبير بين متوسطي القياسين القبلي والبعدي. كما ينسجم هذا مع نظرية التعلم بالوسائط المتعددة عند ماير (Mayer, 2009)، والتي تفترض أن التعلم يحدث بصورة أفضل عندما يُقدّم المحتوى من خلال تكامل بين المعلومات اللفظية والبصرية بدلاً من الاعتماد على قناة واحدة؛ فتقديم الدالة الخطية عبر تمثيلات متعددة ومتزامنة - الجبرية والبيانية والعديدية - كما توفرها هذه البرمجيات، ساعد الطلبة على بناء نموذج ذهني متكامل للدالة الخطية (Kaput, 1992)، وهو نموذج لم يكن متوفراً بالقدر ذاته في القياس القبلي.

## 12. مناقشة نتائج السؤال الثالث

نص السؤال السابع: "هل توجد فروق ذات دلالة إحصائية بين متوسطات درجات أفراد المجموعة التجريبية في القياسين البعدي والمؤجل على اختبار تنمية الفهم المفاهيمي للدالة الخطية لدى طلبة الصف الثامن في مدارس الداخل الفلسطيني تعزى لفاعلية البرنامج القائم على بيئة تعلم تكاملية باستخدام (GeoGebra) و (Desmos)؟"

أظهرت النتائج وجود فروق دالة إحصائية عند مستوى الدلالة ( $\alpha \leq 0.05$ ) بين القياسين البعدي والمؤجل في اختبار الفهم المفاهيمي للدالة الخطية لدى أفراد المجموعة التجريبية، حيث ارتفع متوسط الأداء من (20.83) في القياس البعدي إلى (23.17) في القياس المؤجل، بقيمة (ت) محسوبة بلغت (-2.138) وبمستوى دلالة (0.041).

وتُعد هذه النتيجة - في تقدير الباحثة - من أكثر نتائج الدراسة الحالية دلالة تفسيرية، إذ تكشف بوضوح أن أثر البرنامج التعليمي في تنمية الفهم المفاهيمي لم يتوقف عند لحظة انتهاء التطبيق المباشر، بل استمر بالتبلور والنضج لدى الطلبة خلال فترة المتابعة اللاحقة، بل زاد بصورة دالة إحصائية. وتفسر الباحثة هذا الاستمرار في ضوء الطرح البنائي الراديكالي عند فون جلاسرسفيلد (von Glasersfeld, 1995)، الذي يؤكد أن المعرفة الرياضية لا تُكتسب من خلال النقل المباشر من المعلم إلى المتعلم، بل من خلال نشاط المتعلم الذهني المستمر في بناء المعاني؛ وهذا النشاط الذهني، بخلاف الحدث التعليمي المباشر المحدود بزمان التطبيق، قد يستمر بعد انتهاء التدخل التعليمي الرسمي، حيث يواصل الطالب معالجة الخبرات التي مرّ بها ذهنياً وإعادة تنظيمها ضمن بنيته المعرفية.

ويجد هذا التفسير سنداً قوياً في نظرية التعلم بالوسائط المتعددة عند ماير (Mayer, 2009) التي تفترض أن التعلم العميق يتطلب معالجة نشطة تشمل الانتباه والتنظيم والتكامل بين المعلومات الجديدة والمعرفة السابقة (Mayer, 2014) وهذه العمليات - خصوصاً عملية التكامل - لا تحدث بالضرورة في لحظة التعرض المباشر للمحتوى، بل قد تستمر وتتعمق مع مرور الوقت كلما أتيحت للمتعمّل فرص للتأمل والربط بين ما تعلمه وخبراته اللاحقة. فحين تُرسي الخبرة التعليمية القائمة على (GeoGebra) و (Desmos) شبكة من الروابط بين التمثيلات المختلفة للدالة الخطية - الجبرية والبيانية والعديدية - فإن الطالب قد يستمر في معالجة هذه الروابط ذهنياً ويعيد تنظيمها وتوطيدها حتى بعد انتهاء التدخل المباشر (Kaput, 1992)، وهو ما يُترجم إلى التحسن الإضافي الملحوظ في القياس المؤجل.

وتتفق هذه النتيجة تحديداً وبشكل مباشر مع دراسة بيرغن ويزيجي (Birgin & Uzun Yazıcı, 2021)، وهي الدراسة الوحيدة بين الدراسات السابقة المستعرضة التي طبّقت تصميمًا ماثلاً يتضمن قياساً مؤجلاً؛ إذ طبّقت هذه الدراسة اختبار الفهم المفاهيمي (CUT) على طلبة الصف الثامن قبلياً وبعدياً، ثم أعادت تطبيقه بعد مرور سبعة أسابيع كاختبار للاحتفاظ بالتعلّم،

تري الباحثة أن هذه النتيجة تحمل دلالة تربوية مهمة تشير إلى أن تقييم فاعلية البرامج التعليمية التي تعتمد على التكنولوجيا التفاعلية لا يجب أن يقتصر فقط على القياس البعدي الفوري. فقد تكون هذه المقاييس غير كافية لالتقاط الأثر الكامل للتدخل على المفاهيم العميقة، مثل الفهم المفاهيمي. تظهر نتائج السؤال الأول عدم وجود فروق ذات دلالة بين المجموعتين في القياس البعدي المباشر، بينما تبين نتائج هذا السؤال استمرار تطور الفهم المفاهيمي لدى المجموعة التجريبية بعد ذلك. مما يشير إلى أنه لو تم إجراء قياس مؤجل مشابه للمجموعة الضابطة، قد تظهر فروق ذات دلالة لصالح المجموعة التجريبية في وقت لاحق. وتعد هذه الفرضية جديرة بالاهتمام لدراسات مستقبلية لاستكشافها.

### 2.4.13 التوصيات والمقترحات

في ضوء نتائج الدراسة، خلصت الدراسة إلى التوصيات والمقترحات الآتية:

1. إعادة النظر في مدة تطبيق البرامج التعليمية عند استهداف الفهم المفاهيمي تحديداً: بما أن نتائج السؤال الأول لم تُظهر فروقاً دالة إحصائياً بين المجموعتين في القياس البعدي المباشر، بينما أظهرت نتيجة السؤال السابع استمرار تطور الفهم المفاهيمي لدى المجموعة التجريبية ذاتياً حتى القياس المؤجل، توصي الباحثة بإطالة فترة تطبيق البرامج التعليمية المستقبلية القائمة على (GeoGebra) و (Desmos) عند استهداف الفهم المفاهيمي كمتغير رئيس، أو تخصيص وقت أطول نسبياً لهذا البُعد داخل البرنامج مقارنة بالبعدين الإجرائي والتفكيرية.
2. تبني مدخل الدمج بين (GeoGebra) و (Desmos) معاً بدلاً من الاقتصار على أحدهما: توصي الباحثة المعلمين ومصممي المناهج بتبني مدخل تدريسي يجمع بين البرنامجين معاً بدلاً من استخدام أحدهما منفرداً.
3. توفير برامج تدريبية للمعلمين وتحسين البنية التحتية التكنولوجية: توصي الباحثة الجهات التربوية بتوفير برامج تطوير مهني موجّهة للمعلمين حول توظيف (GeoGebra) و (Desmos)، إلى جانب تحسين البنية التحتية التكنولوجية اللازمة لتطبيقها في المدارس.
4. اعتماد القياس المؤجل ضمن تصميم الدراسات التقييمية لبرامج التكنولوجيا التفاعلية: انطلاقاً مما أظهرته نتيجة السؤال السابع من أن القياس البعدي المباشر وحده لم يكن كافياً لالتقاط الأثر الكامل للبرنامج على الفهم المفاهيمي، توصي الباحثة الجهات القائمة على تقييم البرامج التعليمية المشابهة بعدم الاكتفاء بالقياس البعدي المباشر، وتضمن قياس مؤجل ضمن تصميم الدراسة كلما أمكن ذلك.
5. إجراء دراسة تُطبّق قياساً مؤجلاً للمجموعة الضابطة أيضاً - إلى جانب التجريبية - للتحقق مما إذا كانت الفروق الدالة إحصائياً في الفهم المفاهيمي تظهر لصالح المجموعة التجريبية عند نقطة زمنية لاحقة، بما يتسق مع الفرضية التي طرحتها الباحثة عند مناقشة نتيجة السؤال السابع.
6. إجراء دراسات تتناول استدامة الأثر الإجرائي لبرمجيّتي (GeoGebra) و (Desmos) بعد انتهاء التدخل المباشر، إذ لم تُعثر الباحثة - بعد استعراض جميع الدراسات السابقة المتاحة - على دراسة طبّقت قياساً مؤجلاً للفهم الإجرائي تحديداً باستخدام هاتين البرمجيّتين يمكن مقارنة نتيجة السؤال الثامن به مباشرة.
7. إجراء دراسات في السياق الفلسطيني المحلي تحديداً - ولا سيما في مدارس الداخل الفلسطيني كما في الدراسة الحالية - تتناول متغيرات تابعة إضافية لم تتناولها الدراسة الحالية، كالفهم الإجرائي، كالدافعية نحو تعلم الرياضيات، أو الاتجاهات نحو استخدام التكنولوجيا، أو مهارات حل المشكلة الرياضية تحديداً.

المراجع العلمية

المراجع الأجنبية

Ayman-Nolley, S. (1978). Piaget and Vygotsky on creativity. *HUMAN COGNITION*, 107.

Azamat, R. (2026). *Ethiopian International Journal of Multidisciplinary Research The effectiveness of geogebra and desmos interactive platforms in mathematics education: a comprehensive pedagogical evaluation and synthesis*. <https://www.eijmr.org/index.php/eijmr>

Bhatia, K., & Chakraborty, P. (2024). Teaching algebra to high school students using Desmos graphing calculator. *IETE Journal of Education*, 65(2), 128–138.

Birgin, O., & Uzun Yazıcı, K. (2021). The effect of GeoGebra software–supported mathematics instruction on eighth-grade students’ conceptual understanding and retention. *Journal of Computer Assisted Learning*, 37(4), 925–939. <https://doi.org/10.1111/jcal.12532>

Brenner, M., Mayer, R., Moseley, B., Brar, T., Durán, R., Reed, B., & Webb, D. (1997). Learning by understanding: The role of multiple representations in learning algebra. *American Educational Research Journal*, 34(4), 663–689.

Cárcamo, A., de Dios Viramontes-Miranda, J., & Fuentealba, C. (2026). From context to formal reasoning: Supporting students’ understanding of the kernel of a linear transformation through a hypothetical learning trajectory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 82, 101314.

Chechan, B., Ampadu, E., & Pears, A. (2023). Effect of using Desmos on high school students’ understanding and learning of functions. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(10), em2331.

Earliand, A. R., Alfisyahra, A., Hasbi, M., & Ismailmuza, D. (2026). The Effect of GeoGebra-Based Instruction on Students’ Conceptual Understanding of Exponential Functions. *Vygotsky: Jurnal Pendidikan Matematika Dan Matematika*, 8(1), 65–76.

Ebel, R. (1972). *Essentials of Educational Measurement* (1st ed.). Prentice Hall.

Elagha, N., & Pellegrino, J. (2024). Understanding error patterns in students’ solutions to linear function problems to design learning interventions. *Learning and Instruction*. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2024.101895>

Ellis, A., Lockwood, E., Tillema, E., & Moore, K. (2021). Generalization Across Multiple Mathematical Domains: Relating, Forming, and Extending. *Cognition and Instruction*, 40, 351–384. <https://doi.org/10.1080/07370008.2021.2000989>

Fauzi, N., Waluya, S., Zaenuri, Z., & Walid, W. (2026). Students’ Mathematical Literacy in GeoGebra-Assisted Mathematics Learning: A Systematic Literature Review. *Media Pendidikan Matematika*, 14(1), 93–106.

Hakim, R., Suhendra, M., & Arifin, M. (2025). Exploring the Role of Desmos in Mathematics Learning: A Quantitative Descriptive Study. *Gammath: Jurnal Ilmiah Program Studi Pendidikan Matematika*, 10(1), 1–9.

- Hidayat, R., Noor, W., Nasir, N., & Ayub, A. (2024). The role of geogebra software in conceptual understanding and engagement among secondary school student. *Infinity Journal*, 13(2), 317–331. <https://doi.org/10.22460/infinity.v13i2.p317-332>
- Hohenwarter, M., Jarvis, D., & Lavicza, Z. (2009). Linking Geometry, Algebra, and Mathematics Teachers: GeoGebra Software and the Establishment of the International GeoGebra Institute. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 16(2).
- Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: The case of GeoGebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27(3), 126–131.
- Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 27–32). Lawrence Erlbaum Associates.
- Jerfi, J., & Basuki, F. (2026). Development and evaluation of geogebra-based learning media to enhance students' conceptual understanding of parabolic motion. *Physics and Science Education Journal (PSEJ)*, 26–38.
- Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515–556). Macmillan.
- Kim, E., & Cho, W. (2022). Mathematising process analysis of linear function concept based on Freudenthal's didactical phenomenology. *The Mathematical Education*. <https://doi.org/10.63311/mathedu.2022.61.3.419>
- Madsen, H. S. (1983). *Techniques in testing*. OUP.
- Mayer, R. (2014). Cognitive theory of multimedia learning. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge handbook of multimedia learning (2nd ed.)* (pp. 43–71). Cambridge University Press.
- Mayer, R. (2009). *Multimedia learning (2nd ed.)*. Cambridge University Press.
- Moore-Russo, D., Conner, A., & Rugg, K. (2011). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational Studies in Mathematics*, 76(1), 3–21.
- Moreno, R., & Mayer, R. (2007). Interactive multimodal learning environments. *Educational Psychology Review*, 19(3), 309–326. <https://doi.org/10.1007/s10648-007-9047-2>
- NCTM, À. (n.d.). National Council of Teachers of Mathematics (2000) Principles and standards for school mathematics. *Council of Teachers of Mathematics*.
- Nuñez-Gutierrez, K., Rodríguez-Nieto, C., Correa-Sandoval, L., & Moll, V. (2025). High school Colombian students' variational thinking triggered by mathematical connections in a laboratory on linear functions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 20(1). <https://doi.org/10.29333/iejme/15649>
- Nuriza, R., & Mahmudah, U. (2025). Learning outside the classroom increases elementary students' interest and conceptual understanding of mathematics. *Academia Open*, 10(1), 1–7. <https://doi.org/10.21070/acopen.10.2025.11039>

- Oktafia, M., & Erita, S. (2025). Integration of Geogebra and Desmos in analytical geometry learning: Its effect on students' mathematical reflective thinking. *Cahaya Pendidikan*, 11(2).
- Pittalis, M., Sproesser, U., Demosthenous, E., & Odysseos, E. (2024). Enhancing functional thinking in grade 5–6 students through a dynamic mathematics intervention program. *Education and Information Technologies*, 30, 1329–1361. <https://doi.org/10.1007/s10639-024-12865-y>
- Purba, S., Taek, V., Suranti, N., & Cristopel, D. (2026). The Utilization of Mathematics Digital Learning Media: GeoGebra, Desmos, and Symbolab in Junior High School. *Jurnal Pengabdian Sains Dan Humaniora*, 5(1), 1–11.
- Ramaila, S. (2026). Utilizing GeoGebra as an Interactive Digital Tool to Enhance Effective Mathematics Teaching and Learning: A Systematic Review. *Journal of Research in Mathematics Education*, 15(2), 106–124.
- Schunk, D. (2012). *Learning theories an educational perspective*. Pearson Education, Inc.
- Stump, S. (2001). High school precalculus students' understanding of slope as measure. *School Science and Mathematics*, 101(2), 81–89.
- Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive Science*, 12(2), 257–285. [https://doi.org/10.1207/s15516709cog1202\\_4](https://doi.org/10.1207/s15516709cog1202_4)
- Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356–366.
- von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. Falmer Press.
- Wati, S., Fitriana, L., & Mardiyana, M. (2018). Students' difficulties in solving linear equation problems. *Journal of Physics: Conference Series*, 983, 12137. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/983/1/012137>
- Zou, Y., Kuek, F., Feng, W., & Cheng, X. (2025). Digital learning in the 21st century: trends, challenges, and innovations in technology integration. *Frontiers in Education*, 10, 1562391.